第８講　整数問題

1　［1］　サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る．ただし，サイレンは１秒または２秒鳴り続けて１秒休み，これを繰り返す．また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする．

(1)　１秒または２秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回，n 回とするとき，m，n の満たす関係式を求めよ．

(2)　信号は何通りできるか．

［2］　次の方程式を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ．

$$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ l，m，n を自然数とする．$l+m+n$ が奇数のとき，整数 $3^l \times 5^m \times 7^n$ のすべての正の約数の総和が偶数であることを示せ．

［2］ a を奇数，m を整数とするとき，次のことを証明せよ．ただし $a>1$，$m>1$ とする．

(1) m が偶数ならば a^m+1 は 4 で割り切れない．

(2) m が奇数ならば a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れる．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）を考える．$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数であることを示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　整数問題

[1]　［1］　サイレンを断続的に鳴らして16秒の信号を作る．ただし，サイレンは1秒または2秒鳴り続けて1秒休み，これを繰り返す．また，信号はサイレンの音で始まり，サイレンの音で終わるものとする．

(1)　1秒または2秒鳴り続ける回数をそれぞれm回，n回とするとき，m，nの満たす関係式を求めよ．

(2)　信号は何通りできるか．

(1)　1秒鳴る，2秒鳴る回数をそれぞれm，nとすると，休みの回数は$m+n-1$

$1\cdot m+2\cdot n+1\cdot(m+n-1)=16$　　よって　$\mathbf{2m+3n=17}$

(2)　$2m+3n=17$　より　$2(m-1)=3(5-n)$

2，3は互いに素より，$5-n$は2の倍数．よって　$5-n=2k$（kは2以下の整数）とおける．

$n=-2k+5$　　このとき　$m=3k+1$

よって　$(m, n)=(1, 5), (4, 3), (7, 1)$

$m=1, n=5$となる信号は　$\dfrac{6!}{5!}=6$（通り）

$m=4, n=3$となる信号は　$\dfrac{7!}{4!3!}=35$（通り）

$m=7, n=1$となる信号は　$\dfrac{8!}{7!}=8$（通り）

ゆえに，信号は　$6+35+8=$**49（通り）**できる．

[1]　［2］　次の方程式を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ．

$$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$$

$x^3-y^3-x^2y+xy^2-x^2+y^2+x-y=1$より

$(x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(x-y)-(x-y)(x+y)+(x-y)=1$

$(x-y)(x^2+y^2-x-y+1)=1$　……①

x，yは整数より　$x-y=\pm1$

$x-y=1$　つまり　$y=x-1$のとき

①は　$x^2-2x+1=0$

$x=1$　　このとき　$y=0$

$x-y=-1$　つまり　$y=x+1$のとき

①は　$x^2+1=0$　これを満たす整数xはない．

ゆえに，$(x,\ y)=$**(1, 0)**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ l，m，n を自然数とする．$l+m+n$ が奇数のとき，整数 $3^l\times5^m\times7^n$ のすべての正の約数の総和が偶数であることを示せ．

題意の総和は　$S=(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)(5^0+5^1+\cdots\cdots+5^m)(7^0+7^1+\cdots\cdots+7^n)$　と表される．

1つ目の因数 $(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)$ は $l+1$ 個の奇数の和である．

よって，$l+1$ が偶数，つまり l が奇数のとき $(3^0+3^1+\cdots\cdots+3^l)$ は偶数となる．

2つ目，3つ目の因数も同様に，それぞれ m，n が奇数のときに偶数となる．

ここで，$l+m+n$ が奇数であることより，l，m，n のうち少なくとも1つは奇数である．

よって，3つの因数のうち少なくとも1つは偶数となる．ゆえに，S は偶数である．

2 ［2］ a を奇数，m を整数とするとき，次のことを証明せよ．ただし，$a>1$，$m>1$ とする． (1) m が偶数ならば a^m+1 は4で割り切れない． (2) m が奇数ならば a^m+1 は1より大きな奇数で割り切れる．

(1) $m=2n$ とおく．（n は自然数）

$$a^m+1=a^{2n}+1=(a^n)^2-1+2=(a^n+1)(a^n-1)+2$$

ここで，a^n+1，a^n-1 はともに偶数より，$a^m+1=(4\text{ の倍数})+2$

よって，a^m+1 は4で割り切れない．

(2) m が奇数のとき

$$a^m+1=(a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}-\cdots\cdots+1)$$

2つ目の因数は m 個，すなわち3個以上の奇数の和より，1より大きい奇数となる．

よって，a^m+1 は1より大きな奇数で割り切れる．

3 多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）を考える．$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ がすべて整数ならば，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数であることを示せ．

$f(-1)=-1+a-b+c$ ……①　$f(0)=c$ ……②　$f(1)=1+a+b+c$ ……③ がすべて整数．

②より c は整数．

①＋③より $2a+2c$ が整数．　　よって　$2a$ が整数．

①－③より $2b+2$ が整数．　　よって　$2b$ が整数．

以下，m を整数とすると

$n=2m$ のとき　$f(n)=f(2m)=8m^3+2(2a)m^2+2bm+c$

$n=2m-1$ のとき　$f(n)=f(2m-1)$

$$=(2m-1)^3+a(2m-1)^2+b(2m-1)+c$$
$$=(2m-1)^3+2a\cdot(2m^2-2m)+2bm+(a-b+c)$$
$$=(2m-1)^3+2a\cdot(2m^2-2m)+2bm+f(-1)+1$$

これらはともに整数である．

よって，すべての整数 n に対し，$f(n)$ は整数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a，b，c は正の整数で，$a<b<c$，$a+b<c$ を満たすものとする．このとき整式 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$ が $x-c$ で割り切れるような (a, b, c) の組をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1からnまでの自然数1，2，3，……，nの和をS_nとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　nを4で割った余りが0または3ならば，S_nが偶数であることを示せ．

(2)　S_nが偶数ならば，nを4で割った余りが0または3であることを示せ．

(3)　S_nが4の倍数ならば，nを8で割った余りが0または7であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a，b，c は正の整数で，$a<b<c$，$a+b<c$ を満たすものとする．このとき整式 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$ が $x-c$ で割り切れるような $(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ．

解答例

$ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174=(x-c)Q(x)$ とおくと

$x=c$ のとき $ac^2-(a^2+ab)c+a^2b-174=0$

$a\{c^2-(a+b)c+ab\}=174$

$a(c-b)(c-a)=174=2\cdot3\cdot29$ ←因数分解により「積が一定値である３つの整数」を考える．

ここで，$a+b<c$ より　$a<c-b$

また，$a<b$ より　$c-b<c-a$ ←引く数が小さくなれば，全体としては大きくなる．

よって　$a<c-b<c-a$

したがって　$(a,\ c-b,\ c-a)=(1,\ 2,\ 87),\ (1,\ 3,\ 58),\ (1,\ 6,\ 29),\ (2,\ 3,\ 29)$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 86,\ 88),\ (1,\ 56,\ 59),\ (1,\ 24,\ 30),\ (2,\ 28,\ 31)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **2**　1から n までの自然数1，2，3，……，n の和を S_n とするとき，次の問いに答えよ．
> (1)　n を4で割った余りが0または3ならば，S_n が偶数であることを示せ．
> (2)　S_n が偶数ならば，n を4で割った余りが0または3であることを示せ．
> (3)　S_n が4の倍数ならば，n を8で割った余りが0または7であることを示せ．

解答例

$S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

m を整数とする．

(1)　$n=4m$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 4m(4m+1)=2m(4m+1)$　よって S_n は偶数

余りによる分類

$n=4m+3$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+3)(4m+4)=2(m+1)(4m+3)$　よって S_n は偶数

以上より題意は示された．

(2)　n を4で割った余りが1または2であるときを考える．

$n=4m+1$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+1)(4m+2)=(2m+1)(4m+1)$　よって S_n は奇数

$n=4m+2$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(4m+2)(4m+3)=(2m+1)(4m+3)$　よって S_n は奇数

よって，対偶が真より題意は示された．

(3)　S_n が4の倍数ならば S_n は偶数である．

よって，(2)より n を4で割った余りが0または3である．

したがって，$n=8m$，$8m+3$，$8m+4$，$8m+7$ のいずれかである．

$n=8m+3$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(8m+3)(8m+4)=2(2m+1)(8m+3)=2\times$(奇数)

よって，S_n は4の倍数ではない．

$n=8m+4$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{2}(8m+4)(8m+5)=2(2m+1)(8m+5)=2\times$(奇数)

よって，S_n は4の倍数ではない．

以上より，$n=8m$，$8m+7$ に限られ，題意は示された．

> 可能性がある n の分類において，「4で割った余りが0，3にならなければ S_n は4の倍数にならない」，いわゆる「対偶」を示した．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。